УДК 004.9

ЗАЙЧЕНКО Ю.П.,
МУРГА М.О.

УДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДУ ОПТИМІЗАЦІЇ НЕЧІТКОГО ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЮ З НОВИМИ ФУНКЦІЯМИ РИЗИКУ

Розглядається задача оптимізації інвестиційного портфелю математична модель якого побудована з використанням теорії нечітких множин. Досліджено питання вигляду функцій ризику, прискорення оптимізації та оптимізації в умовах, коли множина розв'язків може містити більше, ніж один елемент.

A problem of investment portfolio optimization which mathematical model is built using fuzzy sets theory is investigated. Problems of risk function views, optimization's acceleration, and optimization in conditions of more than one-element solution set are studied.

Вступ

Розвиток ринкових відносин, пришвидшення укладання торгівельних угод, ускладнення економічної ситуації у світі зумовлюють перегляд моделей функціонування економіки. Класичні підходи, котрі ґрунтуються на симетричному вигляді функцій корисності різних економічних сутностей поступово відходять на задній план. Економіка сьогодні – це повна невизначеність ситуацій та суперечність інформації, що циркулює у ній. Саме ці міркування зумовлюють все глибше проникнення у економічний аналіз моделей, що будуються на підставі нечіткої логіки. Не оминув цей процес і методики формування інвестиційного портфелю. Теорія нечіткого інвестиційного портфелю вже описана у багатьох роботах. Досліджено ряд важливих питань, як то: вигляд прямої та двоїстої задачі оптимізації [1-7], властивості залежності ризик-дохідність інвестиційного портфелю [1-7], багатокритеріальна задача оптимізації портфелю, де в якості критеріїв виступає як дохідність портфелю, так і його ризик [6], вивчена множина розв'язків задач оптимізації [7], показано, що у загальному випадку задача оптимізації багатоінструментного портфелю може бути зведена до портфелю, що оперує двома фінансовими інструментами [7].

Незважаючи на вже досить солідний термін дослідження проблеми нечіткого інвестиційного портфелю та великий об'єм роботи, що була зроблена, ще залишається відкритим ряд питань. Це: що таке функція ризику нечіткого інвестиційного портфелю, та які ще різновиди функцій ризику нечіткого інвестиційного портфелю можна розглядати? Чи існує простий у обчислювальному сенсі критерій, щоб дозволив визначати вид залежності ризик-дохідність у випадку двох активів без побудови сітки значень? Це б дозволило отримувати розв'язки багатьох задач оптимізації, не розв'язуючи їх. І, нарешті, у всіх методах оптимізації, які використовуються на даний момент для формування нечіткого портфелю, неявно припускається, що множина розв'язків складається з одного елемента. Але, як було показано в роботі [7], це не так. Тому останнє питання, на яке відповідають автори роботи: це вигляд методу оптимізації інвестиційного портфелю, за умови, коли множина розв'язків складається більш, ніж з одного елемента?

Таким чином, метою роботи є розробка швидкого методу оптимізації нечіткого інвестиційного портфелю, за умови існування в множині оптимальних розв'язків задачі
більше одного елемента.

Структура роботи побудована наступним чином. Стаття містить три частини. В першій частині розглядаються питання фізичного змісту функції ризику нечіткого інвестиційного портфелю та вивчаються її властивості. В другій частині вводиться простий в обчислювальному сенсі критерій визначення вигляду залежності ризик-дохідність портфелю. В третій частині описаний метод формування інвестиційного портфелю за умови, що множина розв'язків задачі оптимізації може містити більш ніж один елемент.

1. Постановка оптимізаційної задачі. Функції ризику

В формальному вигляді задача оптимізації інвестицій в різні активи має вигляд **(1)**:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i \to \max, \\ &\beta\left(x, r, r^*\right) \le \beta_1, \\ &\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ &x_i \ge 0, \forall i = 1 \ldots n. \end{aligned} \qquad \mathbf{(1)}$$

Цільова функція містить наступні компоненти: $\bar{r}_i$ – очікувана дохідність від інвестиції у i-й актив у прогнозі на проміжок часу T, x_i – доля інвестицій у i-й актив від загальної суми інвестування, а n – загальна кількість активів. Таким чином, критерій – максимізація очікуваної дохідності всього інвестиційного портфелю.

Перше обмеження означає вимогу того, щоб ризик неефективного інвестування не перевищував певний рівень. Останні два обмеження описують долі інвестування загальної суми у фінансові інструменти

Далі мова буде йти про нечітку портфельну теорію з функціями належності дохідностям окремих активів трикутного вигляду, і тому функцію ризику можна записати наступним чином **(2)**:

$$\beta\left(x, r, r^*\right) = \beta\left(x_1, \ldots, x_n, r_{\min 1}, \ldots, r_{\min n}, \bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n, r_{\max 1}, \ldots, r_{\max n}, r^*_{\min}, \bar{r}^*, r^*_{\max}\right). \qquad \mathbf{(2)}$$

Окремого роз’яснення в формулі **(2)** вимагає $\left(r_{\min i}, \bar{r}_i, r_{\max i}\right)$ – позначення нечіткого (трикутного) числа дохідності i-го активу – відповідно мінімальне значення, найбільш очікуване значення та максимальне значення. $\left(r^*_{\min}, \bar{r}^*, r^*_{\max}\right)$ – трикутне нечітке число критеріального значення дохідності – значення дохідності портфелю, нижче якого портфель вважається неефективним.

Останні два обмеження позначають, що x_i – доля інвестицій у i-й актив.

В основі визначення функції ризику нечіткого портфелю лежить вірогідність потрапляння портфелю в зону неефективних вкладень.

На Рис. 1 зображене розташування функцій належностей критеріального значення дохідності портфеля та дохідності, що очікується.

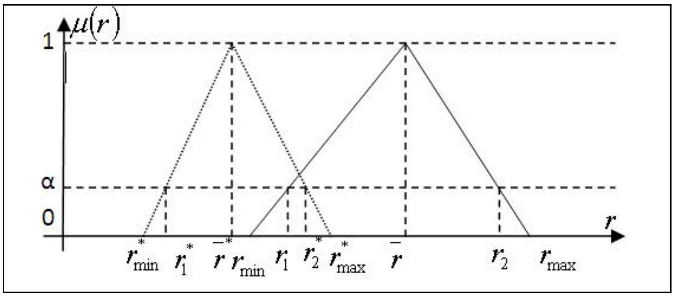

Рис. 1. Ліворуч – функція належності критеріального значення; праворуч – дохідності портфеля.

$$r_{\min} = \sum_{i=1}^{n} x_i r_{\min i}, \; r_{\max} = \sum_{i=1}^{n} x_i r_{\max i}, \; \bar{r} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{r}_i .$$

Взагалі кажучи, взаємне розташування на площині графіків Рис. 1 можливо яке завгодно. Тут приводиться даний випадок для наочності.

Зрізу рівня α на Рис. 1 та у його позначеннях на площині значення дохідності портфеля – критеріальне значення відповідає Рис. 2.

На Рис. 2 через S_α позначено площину можливих неефективних випадків дохідності.

Якщо через $\varphi(\alpha)$ позначити геометричну ймовірність потрапляння портфелю в зону неефективності в залежності від рівня α, то очевидно, що справедлива наступна формула:

$$\varphi(\alpha) = \frac{S_\alpha}{\left(r_2(\alpha) - r_1(\alpha)\right)\left(r^*_2(\alpha) - r^*_1(\alpha)\right)}. \qquad \mathbf{(3)}$$

Нехай далі у викладеннях c – деяка константа.

А функцію ризику можна визначити як математичне сподівання потрапляння портфелю в зону неефективності по всім рівням α (енергетичним рівням), за формулою **(4)**:

$$\beta = \int_0^1 p(\alpha)\varphi(\alpha)d\alpha . \qquad \mathbf{(4)}$$

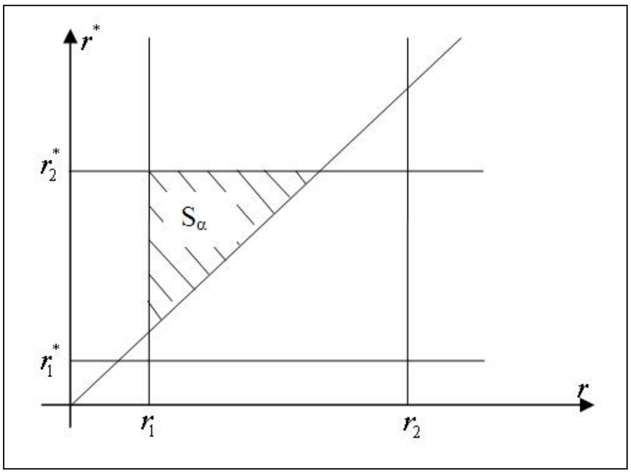

Рис. 2. Зображення зони неефективності портфеля.

Для того, щоб функція ризику змінювалася в діапазоні від 0 до 1 необхідне введення ще умови нормування **(5)**:

$$\int_0^1 p(\alpha)d\alpha = 1\,. \quad \mathbf{(5)}$$

$p(\alpha)$ – щільність ймовірності потрапляння портфелю на енергетичний рівень α.

В роботі [8] приведено, а в роботах [1-7] досліджено випадок, коли $p(\alpha) = const$. У цьому випадку формула **(4)** набуває вигляду:

$$\beta = \int_0^1 p(\alpha)\varphi(\alpha)d\alpha = \int_0^1 \frac{c}{\int_0^1 cdt}\varphi(\alpha)d\alpha = \int_0^1 \varphi(\alpha)d\alpha\,. \quad \mathbf{(6)}$$

Можна запропонувати ще дві функції ризику.

Перша – коли щільність ймовірності потрапляння на енергетичний рівень змінюється пропорційно величині рівня. Це ситуація природна, так як для більшої волатильності дохідності портфеля потрібна більша енергія ззовні, що робить ризик потрапляння на нульовий рівень (рівень, що вимагає найбільше енергії) – нульовим.

Така функція ризику визначається формулою:

$$\beta = \int_0^1 p(\alpha)\varphi(\alpha)d\alpha = \int_0^1 \frac{\alpha}{\int_0^1 tdt}\varphi(\alpha)d\alpha = \frac{\int_0^1 \alpha\varphi(\alpha)d\alpha}{\int_0^1 tdt} = 2\int_0^1 \alpha\varphi(\alpha)d\alpha\,. \quad \mathbf{(7)}$$

Також в роботі пропонується підхід, в якому мінімізується робота з чіткими значеннями функції ризику. Суть його полягає у тому, що для випадків, коли $\varphi(\alpha) = 0$ або $\varphi(\alpha) = 1$ щільність ймовірності дорівнює нулю – $p(\alpha) = 0$, тому ці випадки відкидаються як непродуктивні. В цьому випадку, якщо за α_1 позначити рівень, коли $\varphi(\alpha) \neq 0$ чи $\varphi(\alpha) \neq 1$, то формула **(4)** набуває вигляду:

$$\beta = \int_0^{\alpha_1} p(\alpha)\varphi(\alpha)d\alpha = \int_0^{\alpha_1} \frac{c}{\int_0^{\alpha_1} cdt}\varphi(\alpha)d\alpha = \frac{c\int_0^{\alpha_1}\varphi(\alpha)d\alpha}{\int_0^{\alpha_1} cdt} = \frac{\int_0^{\alpha_1}\varphi(\alpha)d\alpha}{\alpha_1}\,. \quad \mathbf{(8)}$$

Твердження 1. Функція **(4)** є опуклою функцією.

Доведення. Нижче приводиться доведення твердження для часткового випадку, коли функція ризику описується рівномірним розподілом ймовірностей «енергетичних рівнів» та має вигляд **(6)**. Окрім того, розглядається випадок, коли критеріальне значення дохідності портфелю – чітке та дорівнює – r^*. Стосовно співвідношення критеріального значення та дохідності портфелю в цілому виконується наступна система нерівностей: $r_{\min} \le r^* \le \bar{r}$.

Доведення для інших випадків аналогічне та опущене у зв’язку з обмеженнями на об’єм статті.

Отже, у даному випадку функція ризику портфелю описується формулою [1-6]:

$$\beta\left(\vec{x}\right)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}x_i r_{i\max}-\sum_{i=1}^{N}x_i r_{i\min}}\left(\left(r^*-\sum_{i=1}^{N}x_i r_{i\min}\right)+\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\overline{r_i}-r^*\right)\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\overline{r_i}-r^*}{\sum_{i=1}^{N}x_i\overline{r_i}-\sum_{i=1}^{N}x_i r_{i\min}}\right)\right). \quad \textbf{(9)}$$

Для спрощення викладення доведення твердження необхідно ввести наступні позначення:

$$A(x)=r^*-\sum_{i=1}^{N}x_i r_{i\min}\ , \textbf{(10)}$$

$$B(x)=\sum_{i=1}^{N}x_i\overline{r_i}-r^*, \textbf{(11)}$$

$$C(x)=\sum_{i=1}^{N}x_i\overline{r_i}-\sum_{i=1}^{N}x_i r_{i\min}\ , \textbf{(12)}$$

$$D(x)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}x_i r_{i\max}-\sum_{i=1}^{N}x_i r_{i\min}}\ , \textbf{(13)}$$

$$\varphi(x)=A(x)+B(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}. \textbf{(14)}$$

Для доведення твердження про опуклість функції $\beta(x)$, спочатку необхідно довести опуклість функцій $\varphi(x)$ та $D(x)$. Окрім того, необхідно довести їх невід'ємність.

Спочатку розглянемо функцію $D(x)$.

Використовуючи факт того, що $r_{i\max}\geq r_{i\min}$, знайдемо та оцінимо наступні часткові похідні:

$$\frac{\partial D(x)}{\partial x_i}=-\frac{r_{i\max}-r_{i\min}}{\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\left(r_{i\max}-r_{i\min}\right)\right)^2}<0\ , \textbf{(15)}$$

$$\frac{\partial^2 D(x)}{\partial x_i^2}=\frac{2\left(r_{i\max}-r_{i\min}\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\left(r_{i\max}-r_{i\min}\right)\right)^3}>0\ , \textbf{(16)}$$

$$\frac{\partial^2 D(x)}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{2\left(r_{i\max}-r_{i\min}\right)\left(r_{j\max}-r_{j\min}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\left(r_{i\max}-r_{i\min}\right)\right)^3}>0\ . \textbf{(17)}$$

Тепер опуклість функції $D(x)$ доводиться з наступної системи рівностей:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 D(x)}{\partial x_i^2}\cdot\frac{\partial^2 D(x)}{\partial x_j^2}-\left(\frac{\partial^2 D(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2=\\=\frac{4\left(r_{i\max}-r_{i\min}\right)^2\left(r_{j\max}-r_{j\min}\right)^2-4\left(r_{i\max}-r_{i\min}\right)^2\left(r_{j\max}-r_{j\min}\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\left(r_{i\max}-r_{i\min}\right)\right)^6}=0\end{gathered}\ . \textbf{(18)}$$

Таким чином, функція $D(x)$ є опуклою.

Використовуючи цю ж процедуру доводиться опуклість функції $\varphi(x)$.

Для доведення цього факту необхідно ввести допоміжні позначення:

$$C_i'=\frac{\partial C(x)}{\partial x_i}=\overline{r_i}-r_{i\min}\ , \textbf{(19)}$$

$$B_i'(x)=\frac{\partial B(x)}{\partial x_i}=\overline{r_i}\ . \textbf{(20)}$$

Тоді:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[B(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}\right]=B_i'(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}+\\+B(x)\frac{C(x)}{B(x)}\frac{B_i'(x)C(x)-C_i'(x)B(x)}{C^2(x)}=\\=B_i'(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}+\frac{B_i'(x)C(x)-C_i'(x)B(x)}{C(x)}=\\=\overline{r_i}\ln\frac{B(x)}{C(x)}+\overline{r_i}-\left(\overline{r_i}-r_{i\min}\right)\frac{B(x)}{C(x)}.\end{gathered} \quad \textbf{(21)}$$

Далі береться друга часткова похідна та після перетворень вона набуває вигляду **(22)**:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[B(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}\right]=\frac{\left(\overline{r_i}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\left(\overline{r_i}-r_{\min}\right)\right)-\left(\overline{r_i}-r_{i\min}\right)\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\overline{r_i}-r^*\right)\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\overline{r_i}-r^*\right)\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\left(\overline{r_i}-r_{i\min}\right)\right)^2}\geq 0\ . \textbf{(22)}$$

Виходячи з тих фактів, що $\overline{r_i}>\left(\overline{r_i}-r_{i\min}\right)$ та $\sum_{i=1}^{N}x_i\left(\overline{r_i}-r_{i\min}\right)>\sum_{i=1}^{N}x_i\overline{r_i}-r^*$, можна прийти до висновку, що вираз **(22)** строго більше за 0.

і, тому:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[B(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}\right]>0\ ,$$

Отже,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[A(x)+B(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}\right]>0\ . \textbf{(23)}$$

Наступним кроком є розрахунок змішаних часткових похідних. Результат розрахунку – формула **(24)**:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[B(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}\right] = \frac{\overline{r_i}\,\overline{r_j}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\left(\overline{r_i} - r_{i\min}\right)^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\overline{r_i} - r^*\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\left(\overline{r_i} - r_{i\min}\right)^2\right)} - $$
$$- \frac{\left(2\overline{r_i}\,\overline{r_j} - \overline{r_i}r_{j\min} - \overline{r_j}r_{i\min}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\left(\overline{r_i} - r_{i\min}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\overline{r_i} - r^*\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\overline{r_i} - r^*\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\left(\overline{r_i} - r_{i\min}\right)^2\right)} + \qquad \textbf{(24)}$$
$$+ \frac{\left(\overline{r_i} - r_{i\min}\right)\left(\overline{r_j} - r_{j\min}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\overline{r_i} - r^*\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\overline{r_i} - r^*\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\left(\overline{r_i} - r_{i\min}\right)^2\right)}.$$

Раніше було визначено, що $r_{\min} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i\min}$, $\overline{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{r_i}$ та $r_{\max} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i\max}$. Окрім того, для спрощення подальшого викладення необхідно ввести позначення:

$$E(x) = \left(\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\overline{r_i} - r^*\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\left(\overline{r_i} - r_{i\min}\right)\right)\right)^2, \quad \textbf{(25)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[B(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}\right] = \frac{H(x)}{E(x)}, \quad \textbf{(26)}$$

$$F(x) = \overline{r_i}\left(\overline{r} - r_{\min}\right) - \left(\overline{r_i} - r_{\min}\right)\left(\overline{r} - r^*\right), \quad \textbf{(27)}$$

$$G(x) = \overline{r_j}\left(\overline{r} - r_{\min}\right) - \left(\overline{r_j} - r_{j\min}\right)\left(\overline{r} - r^*\right). \quad \textbf{(28)}$$

Таким чином,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[B(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}\right]\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left[B(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}\right] - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[B(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}\right]\right)^2 =$$
$$= \frac{F^2G^2 - H^2}{E^2} = \frac{(FG - H)(FG + H)}{E^2} \qquad \textbf{(29)}$$

Отже, невід'ємність **(29)** полягає у $FG - H > 0$.

$$FG - H = \left(\overline{r_i}\left(\overline{r} - r_{\min}\right) - \left(\overline{r_i} - r_{i\min}\right)\left(\overline{r} - r^*\right)\right)\times$$
$$\times\left(\overline{r_j}\left(\overline{r} - r_{\min}\right) - \left(\overline{r_j} - r_{j\min}\right) - \left(\overline{r_j} - r_{j\min}\right)\left(\overline{r} - r^*\right)\right) -$$
$$- \overline{r_i}\,\overline{r_j}\left(\overline{r} - r_{\min}\right)^2 + \left(2\overline{r_i}\,\overline{r_j} - \overline{r_i}r_{j\min} - \overline{r_j}r_{i\min}\right)\left(\overline{r} - r_{\min}\right)\left(\overline{r} - r^*\right) - \qquad \textbf{(30)}$$
$$- \left(\overline{r_i} - r_{i\min}\right)\left(\overline{r_j} - r_{j\min}\right)\left(\overline{r} - r^*\right)^2 =$$
$$= \left(\overline{r} - r_{\min}\right)\left(\overline{r} - r^*\right)\left(-\overline{r_j}\left(\overline{r_i} - r_{i\min}\right) - \overline{r_i}\left(\overline{r_j} - r_{j\min}\right) + 2\overline{r_i}\,\overline{r_j} - \overline{r_i}r_{j\min} - \overline{r_j}r_{i\min}\right) = 0$$

Тобто функція $B(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}$ є опуклою, а, отже опуклою є функція **(14)**.

Тепер, для остаточного доведення твердження залишилося показати, що опуклою є функція $\beta(x) = D(x)\cdot\varphi(x)$.

Варто нагадати, що, як було показано раніше, $\varphi(x)$ та $D(x)$ є додатними функція та, окрім того, $D(x)$ є монотонно спадною функцією, оскільки, $D_i'(x) < 0$.

Необхідно довести ще факт того, що $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} = \varphi_i'(x) < 0$.

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A(x)+B(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}\right)=$$
$$=A'(x)+B'(x)+B(x)\frac{C(x)}{B(x)}\frac{B'(x)C(x)-C'(x)B(x)}{C^2(x)}= \quad \textbf{(26)}$$
$$=A'(x)+B'(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}+B'(x)-\frac{B(x)C'(x)}{C(x)}.$$

При підстановці значень $A'(x)$ та $B'(x)$, вираз **(26)** набуває вигляду:

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}=-r_{i\min}+\bar{r}_i\ln\frac{B(x)}{C(x)}+\bar{r}_i-\left(\bar{r}_i-r_{i\min}\right)\frac{B(x)}{C(x)}=$$
$$=\bar{r}_i\left(1+\ln\frac{B(x)}{C(x)}-r_{i\min}-\left(\bar{r}_i-r_{i\min}\right)\frac{B(x)}{C(x)}\right). \quad \textbf{(27)}$$

Оскільки $\frac{B(x)}{C(x)}<1$, то $-r_{i\min}+r_{i\min}\frac{B(x)}{C(x)}<0$.

Звідки, після спрощення **(27)**, можна отримати **(28)**:

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}=\bar{r}_i\left(1+\ln\frac{B(x)}{C(x)}-\frac{B(x)}{C(x)}\right). \quad \textbf{(28)}$$

Якщо повернутися до початкових змінних,то

$$1+\ln\frac{B(x)}{C(x)}-\frac{B(x)}{C(x)}=1+\ln\frac{\bar{r}-r^*}{\bar{r}-r_{\min}}-\frac{\bar{r}-r^*}{\bar{r}-r_{\min}}. \quad \textbf{(29)}$$

Тут слід згадати, що $r^*>r_{\min}=\sum_{i=1}^{N}x_i r_{i\min}$ та $\bar{r}>r^*$. Необхідно показати, що вираз **(29)** є меншим за 0. Якщо ввести позначення $\bar{r}-r^*=a$ та $y=r^*-r_{\min}$, то отримаємо **(30)**:

$$\bar{r}-r_{\min}=\bar{r}-r^*+\left(r^*-r_{\min}\right)=a+y. \quad \textbf{(30)}$$

Підставляючи **(30)** в **(29)** можна отримати, що:

$$1+\ln\frac{\bar{r}-r^*}{\bar{r}-r_{\min}}-\frac{\bar{r}-r^*}{\bar{r}-r_{\min}}=1+\ln\frac{a}{a+y}-\frac{a}{a+y}. \quad \textbf{(31)}$$

Необхідно показати, що

$$\Delta(y)=1+\ln\frac{a}{a+y}-\frac{a}{a+y}<0,\forall y>0.$$

Очевидно, що $\Delta(0)=1+\ln\frac{a}{a+y}-\frac{a}{a+y}=0$ при $y=0$. Окрім того $\Delta(y)$ монотонно спадна, так як:

$$\Delta'(y)=-\frac{1}{a+y}+\frac{a}{(a+y)^2}=-\frac{y}{(a+y)^2}<0,\forall y>0. \quad \textbf{(32)}$$

Таким чином, $\Delta(y)<0,\forall y>0$, і, нарешті, $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}<0$.

Далі проводиться обчислення перших похідних та проаналізуємо їх на підставі доведених раніше фактів про знаки функцій $\varphi(x)$ та $D(x)$ і їх похідних:

$$\frac{\partial(\varphi(x)D(x))}{\partial x_i}=\varphi'(x)D(x)+D'(x)\varphi(x)<0. \quad \textbf{(33)}$$

Розраховуються другі похідні:

$$\frac{\partial^2(\varphi(x)D(x))}{\partial x_i^2} = \varphi''_{ii}(x)D(x) + D'_i(x)\varphi'_i(x) + D''_{ii}(x)\varphi(x) + \\ + D'_i(x)\varphi'_i(x) = \varphi''_{ii}(x)D(x) + 2D'_i(x)\varphi'_i(x) + D''_{ii}(x)\varphi(x) \quad \textbf{(34)}$$

Але, як було показано раніше, $D''_{ii}(x) > 0, \varphi''_{ii}(x) > 0, D'_i(x) < 0, \varphi'_i(x) < 0$. Таким чином,

$$\frac{\partial^2(\varphi(x)D(x))}{\partial x_i^2} > 0 \,. \quad \textbf{(35)}$$

А умова (35) є достатньою умовою того, що функція $\beta(x) = \varphi(x)D(x)$ є опуклою.

Твердження доведено.

Зауваження 1. По-перше, в твердженні доведено, що функція є опуклою, а не строго опуклою. Отже вона може мати більш ніж один екстремум. Окрім того, за результатами роботи [7] задача **(1)** у загальному випадку має континуум розв'язків, навіть у випадку, коли функція має один екстремум, а отже, для отримання одного розв'язку цієї задачі необхідно виконувати дооптимізацію по критерію ризику.

2. Аналіз залежності ризик-дохідність для портфелю з двох фінансових інструментів

Для задачі оптимізації у вигляді **(1)**, як було показано в роботі [7], дуже важливим є випадок $n = 2$. А для даного випадку критичним є вигляд залежності дохідність-ризик. Тобто, якщо по осі абсцис відкласти значення дохідності портфелю, а по осі ординат – ризику, то на даній площині можливо зобразити залежність $\beta(\bar{r})$. В роботі [7] були приведені випадки, коли ця залежність була спадаючою, зростаючою та, просто, мала опуклий вигляд. У роботах [1-8] ще зазначається опуклість функції ризику. А тут постає цікава задача: якщо з взяти два розподіли активів в портфелі – $x_1 = (x_{11} \quad x_{12} \quad \ldots \quad x_{1n}), \sum_{i=1}^{n} x_{1i} = 1$ та $x_2 = (x_{21} \quad x_{22} \quad \ldots \quad x_{2n}), \sum_{i=1}^{n} x_{2i} = 1$ й побудувати на них симплекс $x_3(\alpha) = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, $0 \le \alpha \le 1$, то який критерій можна використати, щоб, не будуючи сітки значень залежності $\beta(\bar{r}(x_3(\alpha)))$, визначити її вигляд по двом точкам – x_1 та x_2.

І тут існує два підходи до розв'язання цієї задачі: взяти значення проекції похідної функції ризику на симплекс, побудований на точках, у цих двох точках по α та подивитися на її знак, чи порахувати узагальнену дивергенцію **(37)** функції ризику по змінним $r_{\min}$, $\bar{r}$ та $r_{\max}$ (тобто, по мінімальному, найбільш очікуваному та максимальному значенню дохідності портфеля) у точках x_1 та x_2 та подивитися на її знаки. Очевидно, що у обчислювальному сенсі останній випадок є більш ефективним.

Нехай точкам x_1 та x_2 відповідають трикутні числа дохідності портфелю $(r_{\min 1}, \bar{r}_1, r_{\max 1})$ та $(r_{\min 2}, \bar{r}_2, r_{\max 2})$. Нехай, для визначеності, $\bar{r}_1 \le \bar{r}_2$.

Тоді узагальнена дивергенція визначається наступною системою формул **(36)-(37)**.

$$\beta = \beta\left(r^*_{\min}, \bar{r}, r^*_{\max}, r_{\min}(x), \bar{r}(x), r_{\max}(x)\right). \quad \textbf{(36)}$$

$$div_{x_1 x_2}\beta(x) = sign\,(r_{\min 2} - r_{\min 1})\frac{\partial}{\partial r_{\min}}\beta(x) + \frac{\partial}{\partial \bar{r}}\beta(x) + sign\,(r_{\max 2} - r_{\max 1})\frac{\partial}{\partial r_{\max}}\beta(x). \quad \textbf{(37)}$$

Тепер очевидно, що якщо $div_{x_1x_2}\beta(x_1) > 0$ та $div_{x_1x_2}\beta(x_2) > 0$ – залежність $\beta(\bar{r}(x_3(\alpha)))$ має зростаючий характер, коли $div_{x_1x_2}\beta(x_1) < 0$ та $div_{x_1x_2}\beta(x_2) < 0$ – залежність $\beta(\bar{r}(x_3(\alpha)))$ має спадаючий характер. У випадку, коли $div_{x_1x_2}\beta(x_1) > 0$ та $div_{x_1x_2}\beta(x_2) < 0$ – залежність має увігнутий вниз характер. Далі в роботі узагальнена дивергенція буде називатися просто – дивергенція.

3. Метод оптимізації портфелю

На підставі дивергенції **(37)** та опуклості функції ризику стає можливою побудова оптимального розподілу на симплексі, утвореному на двох розподілах x_1 та x_2. Процедура побудови даного розподілу далі в роботі буде називатися процедурою F. Її алгоритм наводиться нижче.

По перше, якщо $\bar{r}_1 > \bar{r}_2$, виконується перепозначення x_1 в x_2, а x_2 в x_1 (дане перейменування не впливає на сам метод оптимізації, а в роботі лише має методичне значення).

Алгоритм процедури F.

1. Якщо $\beta(x_1) \le \beta_1$ та $\beta(x_2) \le \beta_1$, то, в силу опуклості функцій ризику та доходності, оптимальним рішенням задачі (1) на симплексі

$\{x : \gamma x_1 + (1-\gamma)x_2, 0 \le \gamma \le 1\}$ є або точка x_2 у випадку, коли $\bar{r}_1 < \bar{r}_2$, або увесь симплекс, коли $\bar{r}_1 = \bar{r}_2$.

2. Якщо $\beta(x_1) > \beta_1$, а $\beta(x_2) \le \beta_1$, то очевидно, що оптимальним рішенням буде x_2.

3. Якщо $\beta(x_1) \le \beta_1$, а $\beta(x_2) > \beta_1$, то будується точка $x_C = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$. Утворюється два нових симплекса $C_1 = \{x : \gamma x_1 + (1-\gamma)x_C, 0 \le \gamma \le 1\}$ та $C_2 = \{x : \gamma x_C + (1-\gamma)x_2, 0 \le \gamma \le 1\}$, на кожному з яких рекурентно запускається процедура F при заданій точності, а з двох оптимальних розподілів обирається одне з найбільшою дохідністю.

4. Якщо $\beta(x_1) \le \beta_1$ та $\beta(x_2) > \beta_1$, то:

4.1. У випадку $div_{x_1 x_2}\beta(x_1) < 0$ та $div_{x_1 x_2}\beta(x_2) > 0$ виконується процедура оптимізації, описана у пункті 3.

4.2. У протилежному до пункту 4.1 випадку задача не має рішень.

На застосуванні процедури F, ґрунтуючись на властивості опуклості функцій ризику та дохідності та, враховуючи *Зауваження 1*, стає можливим побудувати метод оптимізації нечіткого фондового портфелю, що може містити n активів.

Метод оптимізації нечіткого фондового портфелю.

Допустимою множеною рішень (якщо відкинути умову на обмеження по ризику) задачі **(1)** є симплекс $C = \left\{x : x = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i x_i, \sum_{i=1}^{n}\gamma_i = 1\right\}$, де $x_1 = \underbrace{(1,0,0,...,0)}_{n}$, $x_2 = \underbrace{(0,1,0,...,0)}_{n}$, …, $x_n = \underbrace{(0,0,0,...,1)}_{n}$, а n – максимальна кількість активів в портфелі. Саме ці позначення будуть використані при описанні алгоритму методу.

Алгоритм методу.

1. Нехай $D = \{x_i, i = 1,..n\}$. Множина D розбивається на дві підмножини: $A = \{x_i : \beta(x_i) > \beta_1\}$ та $B = \{x_i : \beta(x_i) \le \beta_1\}$.

2. Для точок множини A попарно застосовується процедура F; оптимальні рішення зберігаються в множині S.

3. На точках множини B попарно шукаються розподіли з мінімальним ризиком:

- якщо для x_i та x_j значення узагальненої дивергенції – $div_{x_i x_j}$ – різних знаків, то застосовується метод дихотомічного пошуку для знаходження розподілу, коли дивергенція дорівнює нулю. Отримана точка мінімуму додається до множини B;
- в протилежному випадку – мінімальне значення є на одній з точок і ніякі додаткові дії не виконуються.

4. В силу строгої опуклості функції ризику глобальний мінімум ризику на множині B знаходиться наступним чином: мінімальні попарні значення функції ризику зберігаються в множині K та до множини K застосовуються ті самі дії, що і до множини B на кроці 3 ітеративно до тих пір, поки не буде досягнуто множини точок, що не змінюється, або межі точності. Оптимальне рішення зберігається в множині B, якщо воно там відсутнє.

5. Обираються по одній точці з множин A та B та до них попарно застосовується процедура F; оптимальні рішення зберігаються в множині S.

6. Простим лінійним перебором серед точок множини S вибираються точки з найбільшими значеннями очікуваних дохідностей портфелю. Ці точки утворюють множину M.

7. Якщо множина M складається з єдиної точки – знайдено оптимальне рішення. Інакше – на крок 8.

8. Попарно на точках $x_i, x_j \in M$ будуються симплекси $C_{ij} = \{x : x = \gamma x_i + (1-\gamma)x_j, 0 \le \gamma \le 1\}$ та на даній множині виконується наступна задача оптимізації 8.1-8.4:

8.1. Якщо $div_{x_i x_j}\beta(x_i) = 0$ та $div_{x_i x_j}\beta(x_j) = 0$, то оптимальним рішенням буде увесь симплекс C_{ij} і точки x_i та x_j залишаються в множині M.

8.2. Якщо $div_{x_i x_j}\beta(x_i) < 0$ та $div_{x_i x_j}\beta(x_j) \le 0$, то точка x_i викидається з множини M після закінчення кроку 6 алгоритму.

8.3. Якщо $div_{x_i x_j}\beta(x_i) \ge 0$ та $div_{x_i x_j}\beta(x_j) > 0$, то точка x_j викидається з множини M після закінчення кроку 6 алгоритму.

8.4. Якщо $div_{x_i x_j}\beta(x_i) < 0$ та $div_{x_i x_j}\beta(x_j) > 0$, то, використовуючи метод дихотомічного пошуку та рекурентно викликаючи умови 8.1-8.4. при заданому обмеженні на точність шукається $x_{ij}^0 : div_{x_i x_j}\beta(x_{ij}^0) = 0$. Дана точка зберігається в множині M, а точки x_i та x_j викидаються з множини M після закінчення кроку 6 алгоритму.

9. Якщо M складається з одного елемента, чи діаметр множини менше за межу точності,

чи для всіх точок з множини рівні ризику рівні, то знайдено оптимальну множину розв'язків – симплекс, натягнутий на точки множини M. В іншому випадку – крок 7.

Зауваження 2. Якщо $\forall x_i, i = 1,.., n : \beta(x_i) \le \beta_1$, то $S = B$ і алгоритм з кроку 1 відразу переходить на крок 4.

Твердження 2. Метод збігається за кінцеву кількість кроків.

Доведення. На етапі 2 буде застосовано $\frac{card\ (A)\cdot(card\ (A)-1)}{2}$ процедур F, котра збігається за кінцеву кількість кроків в силу збіжності методу дихотомічного пошуку за кінцеву кількість кроків при заданій точності.

В гіршому випадку на етапі 3 буде застосовано $\frac{card\ (B)\cdot(card\ (B)-1)}{2}$ процедур дихотомічного пошуку.

Об'єм множини K на кожному кроці етапу 4 буде зменшуватись, а отже етап 4 в гіршому випадку зупиниться при досягненні заданої точності.

На етапі 5 буде застосовано $card\ (A)\cdot card\ (B)$ процедур F.

На етапі 6 буде виконано $\frac{card\ (S)\cdot(card\ (S)-1)}{2}$ лінійних порівнянь.

Етапі 7 у гіршому випадку застосовує $card\ (M)\cdot(card\ (M)-1)$ процедур дихотомічного пошуку при заданій точності. А діаметр множини M, що оцінюється на кроці 8, постійно зменшується з кожною ітерацією циклу 8-9, а отже, при заданій точності, кількість ітерацій цього циклу теж обмежена.

Таким чином, метод збігається за скінченну кількість кроків.

Твердження 3. В ході роботи алгоритму методу оптимальне рішення не відкидається.

Доведення.

В силу опуклості функцій ризику та дохідності та у відповідності до етапів методу оптимізації, при відкиданні точки початкового симплексу, оптимальне рішення може бути представлено у вигляді лінійної комбінації точок з певної підмножини множини M, а отже оптимальне рішення в ході роботи алгоритму втрачено не буде.

Висновки

В роботі було розглянуто функцію ризику нечіткого інвестиційного портфелю як найбільш очікуваний випадок потрапляння активу у зону неефективності. На підставі цього було досліджено відому та введено дві нові функції ризику нечіткого інвестиційного портфелю. Також було введено новий простий у обчислювальному сенсі критерій визначення по двох «крайніх» точках виду залежності ризик-дохідність для двох інструментів у портфелі. Слід зауважити, що даний критерій ґрунтується саме на властивості опуклості залежності ризик-дохідність. Запропоновано алгоритм методу оптимізації нечіткого фондового портфелю, у якому використовується даний критерій та припускається, що множина розв'язків задачі пошуку оптимального розподілу у портфелі може містити більше одного елемента.

Список літератури

1. Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард. Анализ инвестиционного портфеля для различных видов функции принадлежности // Системні дослідження та інформаційні технології – №2, – Київ,- 2008. – С.59-76
2. Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард, Заика А.И. Анализ инвестиционного портфеля на основе прогнозирования курсов акций // Вісник Національного технічного університету України «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка – №47,- Київ,- 2007. – С. 168-179
3. Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард, Ови Нафас Агаи Аг Гамиш. Анализ модели оптимизации нечёткого портфеля // Вісник національного технічного університету України «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка – №51, – Київ,- 2010.- С. 197-203
4. Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард. Исследование задачи оптимизации инвестиционного портфеля в нечётких условиях // Information science & Computing, International Book Series – #10, – 2009. – P. 74-82
5. Зайченко Ю.П., Ови Нафас Агаи Аг Гамиш. Исследование двойственной задачи оптимизации инвестиционного портфеля в нечётких условиях // Системні дослідження та інформаційні технології – №3, – Київ,- 2011. – С.63-76

6. Малихех Есфандиярфард, Юрий Зайченко, Ови Нафас Агаи Аг Гамиш. Исследование многокритериальной задачи оптимизации инвестиционного портфеля в нечётких условиях // Applicable information models, International Book Series – #22, – 2011. – P. 83-89
7. Мурга Н.А. Нечёткий фондовый портфель. Исследование и оптимизация/ Н.А. Мурга // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2010. – №3. – С. 60-71.
8. Недосекин А.О. Нечётко множественный анализ риска фондовых инвестиций. – СПб.: 2002. – 181 с.